Une conjecture plus maniable et qui l'entraîne de la conjecture de Hadwiger

Christophe Chalons

Une conjecture plus maniable et qui l'entraîne de la conjecture de Hadwiger

Christophe Chalons, université Paris7, équipe de logique mathématique

October 20, 2014

1 Introduction

Ce pdf très court présente une conjecture qui entraine la conjecture de Hadwiger de manière relativement "violente" et est beaucoup plus accessible aux raisonnements par récurrence.

2 Définitions

On ne s'intéresse qu'aux graphes non orientés, ie aux couples (S, A) tel que A est inclus dans l'ensemble des paires incluses dans S^2. Ici on nomme paire les ensemble de cardinal 2.

Définition 1 *On appelle ile du graphe $G := (S, A)$ une partie D de S tel que le graphe induit par D, c'est à dire $(D, \{p \in A \mid p \subseteq D\})$ est connexe*

L'intérêt de cette définition est qu'elle va permettre de parler de plage (analoguement au fait que les îles de nos vies ont des plages).

Définition 2 *On appelle plage du graphe $G := (S, A)$ une partie P de S, telle qu'il existe une ile D telle que $D \cap P = \emptyset$ et $\forall x \in P \exists y \in D : \{x; y\} \in A$*

La conjecture proprement dite dit la chose suivante: **Conjecture1:** pour tout entier n, pour tout graphe fini G, si G ne peut pas être colorié avec $n + 1$ couleurs alors il existe une plage P de G qui ne peut pas être coloriée avec n couleurs.

Mais nous allons la formuler un tout petit peu autrement pour la rendre la plus accessible possible aux raisonnements par récurrence. **Conjecture2:** pour tout graphe fini G il existe une plage P de G tel que si on rajoute un sommet à P que l'on relie à tous les sommets de P, on obtient un graphe H tel que $G \leq_{cvn} H$

On rappelle la définition de $\leq_{cvn}$

Définition 3 $(S, A) \leq_{cvn} (S', A')$ *abrège il existe une application $f : S \to S'$ telle que pour toute paire $\{x; y\} \in A$: $\{f(x); f(y)\} \in A'$*

Le sigle "cvn"$>$ voulant juste dire que la relation d'équivalence $(G \equiv H) := ((G \leq_{cvn} H)\ et\ (H \leq_{cvn} G))$ a ses classes que nous appelons "chromatic virtual numbers"

3 Théorèmes

Les deux conjecturse entrainent en fait la chose suivante, qui pourra être exploitée dans une recherche de contre-exemples:

Conséquence3 de (conjecture1 ou conjecture2): soit G un graphe. On suppose qu'il nécessite n couleurs pour être colorié. Alors il existe des iles 2 à 2 disjointes dans G : $D_1, D_2 \ldots, D_n$ telles que pour tous i, j tels que $i < j$ et tous deux dans $\{1; \ldots; n\}$, n'importe quel sommet de D_j est relié à **tous** les sommets de D_i.

La preuve de ça, très facile et routinière est laissée en exercice au lecteur.

On rappelle la **Conjecture de Hadwiger:** soit $G := (S, A)$ un graphe. On suppose qu'il nécessite n couleurs pour être colorié. Alors il existe des iles 2 à 2 disjointes dans G : $D_1, D_2 \ldots, D_n$ telles que pour tous i, j tous deux dans $\{1; \ldots; n\}$, il existe un sommet x de D_i et un sommet y de D_j tels que $\{i; j\} \in A$